Fibonacci-Zahlen

Geschichte

Im Jahre 1202 wurde in Pisa ein Buch über das indisch-arabische Dezimalsystem von dem italienischen Mathematiker LEONARDO FIBONACCI (1180–1250), auch LEONANDO PISANO (Leonardo aus Pisa) veröffentlicht. Darin formuliert er auch die berühmte Kaninchen-Aufgabe:

Zu Beginn eines Jahres gibt es genau ein Paar neugeborener Kaninchen. Dieses Paar wirft nach 2 Monaten ein neues Kaninchenpaar und dann monatlich jeweils ein weiteres Paar. Jedes neugeborene Paar vermehrt sich auf die gleiche Weise. Wie viele Kaninchenpaare gibt es nach einem Jahr, wenn keines der Kaninchen vorher stirbt? [1]

Definition

Die FIBONACCI-Zahlenfolge (a_n) ist wie folgt definiert:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = 1 \\ 1 & \text{für} \quad n = 2 \\ a_{n-2} + a_{n-1} & \text{für} \quad n > 2 \end{cases}$$

Damit erhält man die Zahlenfolge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

Quotienten

Interessant ist die Untersuchung des Quotienten $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder. Die Untersuchung mit einem Computerprogramm legt die Vermutung nahe, dass dieser Quotient für $n \to \infty$ gegen einen Wert α konvergiert. Wenn man die Konvergenz annimmt, kann man den Wert von α auch berechnen. Nach der Definition der Folge gilt

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

[1] Der Font cmfib8 des Aufgabentextes stammt von DONALD E.KNUTH und verarbeitet bei der Angabe von Größenverhältnissen sämtliche Fibonacci-Zahlen bis 233.

Division durch a_{n+1} ergibt

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} + 1.$$

Nimmt man an, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha,$$

so erhält man die Gleichung

$$\alpha = \frac{1}{\alpha} + 1$$

bzw. die quadratische Gleichung

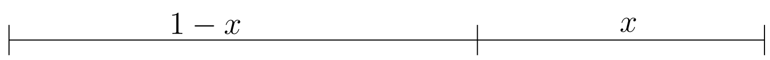
$$\alpha^2 = 1 + \alpha \quad \text{bzw.} \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

mit der positiven Lösung

$$\alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989\ldots$$

Goldener Schnitt

Eine Strecke soll nach dem Verfahren des *Goldenen Schnitts* geteilt werden. Dann verhält sich die kleinere Teilstreckenlänge zur größeren wie die größere zur Länge der Gesamtstrecke.



Hier muss dann gelten:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1}$$

Dann erhält man nach Multiplikation mit $1-x$

$$x = (1-x)^2 \iff x = 1 - 2x + x^2 \iff x^2 - 3x + 1 = 0$$

Als Lösungen erhält man

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Gesucht ist hierbei nur die Lösung mit $0 < x < 1$, d.h.

$$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0{,}381966011\ldots$$

Das Verhältnis der Länge der größeren zu derjenigen der kleineren Strecke ist dann

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\cdot(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2\cdot(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

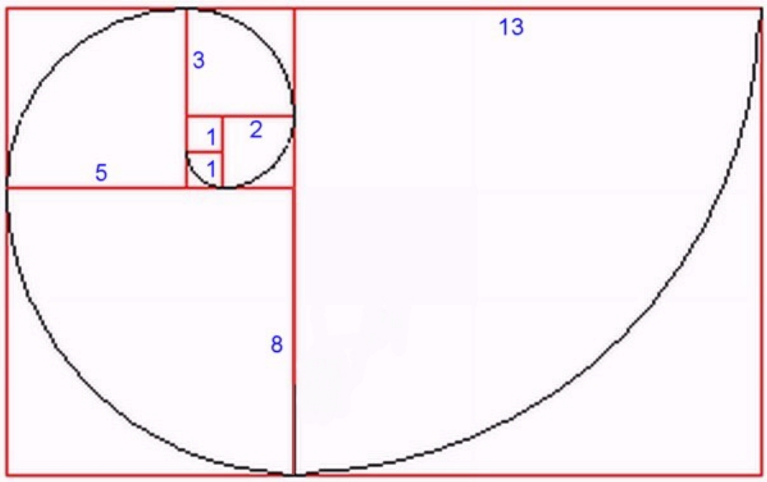
Zusammenfassung: Wir bezeichnen das Verhältnis von größerer zu kleinerer Streckenlänge als

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989\ldots$$

Überraschenderweise ist dieser Wert identisch mit dem Grenzwert α für die Fibonacci-Folge.

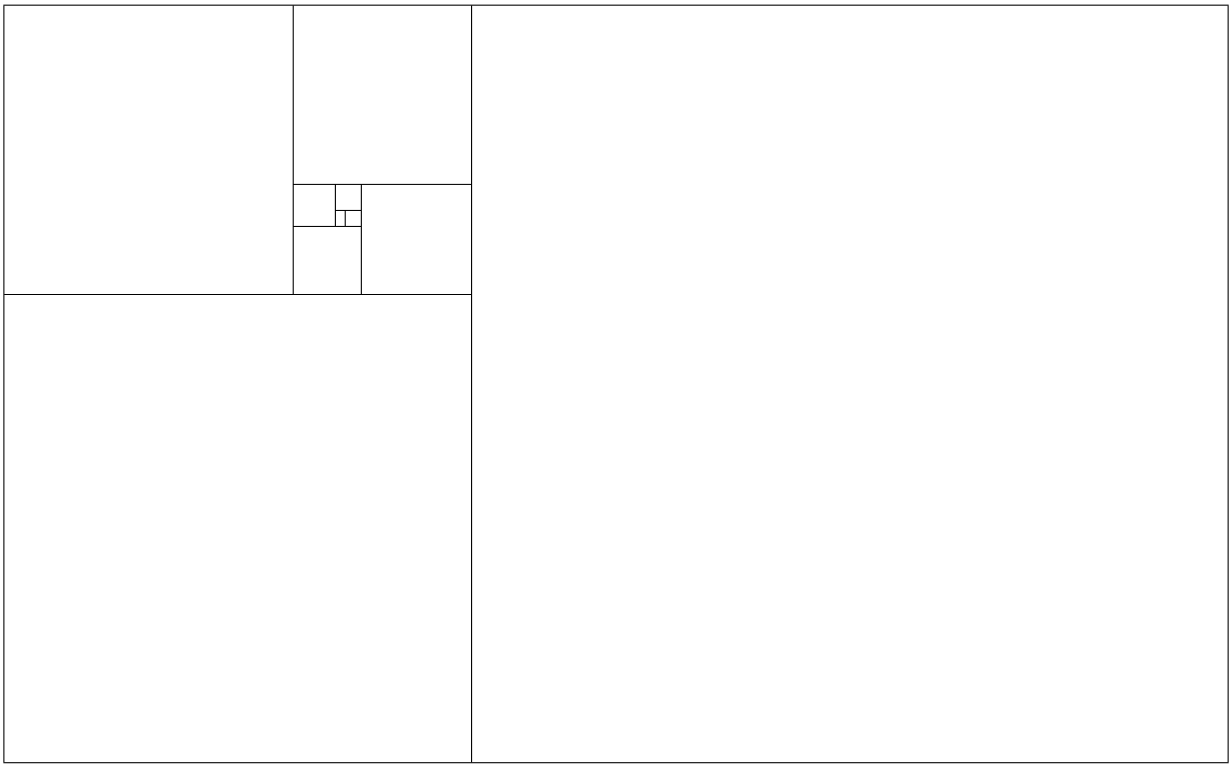
Fibonacci-Spiralen

Die Abbildung zeigt, wie man mit Hilfe der Fibonacci-Zahlen und Viertelkreisen eine Fibonacci-Spirale zeichnen kann. Man beginnt hier z.B. mit einem Rechteck mit den Seitenlängen 21 und 13, d.h. mit zwei benachbarten Zahlen der Fibonacci-Folge.



Je größer man die beiden Startwerte nimmt, desto weiter lässt sich die Spirale zeichnen. Startet man mit einem Rechteck mit zwei Fibonacci-Zahlen „im Unendlichen“, dann ist das Verhältnis der Seitenlängen $\alpha = \phi = 1{,}618033989\ldots$. Dann ergibt sich die *Goldene Spirale* mit unendlich vielen Viertelkreisen.

Das folgende Rechteck ist ein *Goldenes Rechteck*. Nimmt man ein Quadrat weg, so bleibt ein goldenes Rechteck übrig. Dies gilt natürlich für alle weiteren Quadrate und Rechtecke. Jetzt muss man nur noch die Viertelkreise ergänzen (so weit, wie es der Zirkel schafft), um die goldene Spirale zu erhalten.



Spirallänge

Für das oben dargestellte goldenene Rechteck seien die Seitenlängen 1 und $\phi = 1{,}618033989\ldots$. Das nächstkleinere Quadrat hat dann die Seitenlänge $\phi - 1$, was aber wegen der Beziehung $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$ zu $\frac{1}{\phi}$ vereinfacht werden kann. Dies gilt für alle weiteren Quadrate auch, d.h. die nächstkleinere Seitenlänge a_{n+1} eines Quadrates ergibt sich jeweils durch Multiplikation der Quadratseitenlänge a_n mit $\frac{1}{\phi}$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{\phi} \cdot a_n \quad \text{für} \quad n > 1.$$

Es gilt damit

$$a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{1}{\phi}; \quad a_3 = \left(\frac{1}{\phi}\right)^2; \quad \cdots \quad a_n = \left(\frac{1}{\phi}\right)^{n-1}$$

Die Länge eines Viertelkreises v_n ist jeweils die Quadratseitenlänge multipliziert mit $\frac{\pi}{2}$. Die Gesamtlänge S der Spirale ist dann

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} v_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} a_n = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\phi}\right)^{i-1} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\phi}\right)^{i}$$

Die Summe ist eine geometrische Reihe, die konvergiert, weil $|\frac{1}{\phi}| < 1$. Damit ergibt sich

$$S = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{\phi}} = \frac{\pi}{2}\frac{\phi}{\phi - 1}$$

Wegen $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$ ergibt sich zusammenfassend

$$S = \frac{\pi}{2}\phi^2 = 4{,}112398173\ldots.$$

Eine nichtrekursive Formel für die Fibonacci-Zahlen

Das Verhältnis des goldenen Schnittes ist $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989\ldots$. ϕ ist auch Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Die zweite Lösung ist

$$\varrho = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 - \phi = -0{,}618033989\ldots$$

Nun seien Potenzen von ϕ betrachtet (die gleichen Überlegungen gelten dann auch für ϱ. Direkt aus der quadratischen Gleichung folgt

$$\phi^2 = 1 + \phi.$$

Multiplikation der Gleichung mit ϕ und Ersetzen von ϕ^2 liefert jeweils

$$\begin{array}{lllllll}
\phi^3 & = & \phi + \phi^2 & = & \phi + (1+\phi) & = & 2\phi + 1 \\
\phi^4 & = & 2\phi^2 + \phi & = & 2(1+\phi) + \phi & = & 3\phi + 2 \\
\phi^5 & = & 3\phi^2 + 2\phi & = & 3(1+\phi) + 2\phi & = & 5\phi + 3
\end{array}$$

Man erkennt, dass man jede Potenz von ϕ als Linearkombination von ϕ und 1 schreiben kann, wobei die Koeffizienten die Fibonacci-Zahlen (a_n) sind. Mit vollständiger Induktion zeigt man schließlich (ebenso für die zweite Lösung ϱ):

$$\phi^{n+2} = a_{n+2}\phi + a_{n+1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\varrho^{n+2} = a_{n+2}\varrho + a_{n+1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Subtrahiert man die beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$\phi^{n+2} - \varrho^{n+2} = a_{n+2}\,(\phi - \varrho) = a_{n+2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = a_{n+2}\sqrt{5},$$

wodurch man die nichtrekursive Darstellung der Fibonacci-Zahlen (Formel von Binet) erhält:

$$a_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n+2} - \varrho^{n+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$$

Indexmäßig vereinfacht erhält man

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)$$

vorerst für $n > 2$. Für $n = 1$ und $n = 2$ bestätigt man sie direkt, so dass die Formel dann für alle Fibonacci-Zahlen gilt.