

Birds - do it
bees - do it
even educated fleas - do it
let's do it!
(*Cole Porter, „Paris“*)

Einen Flohzirkus veranstaltet man am besten auf einem Tisch. Nehmen wir zu Anfang einen runden Tisch mit dem Radius R . Nun denken wir uns auf dem Tisch noch ein komplexes Koordinatensystem mit dem Ursprung in der Mitte.

Die Flöhe sind nun solchermaßen *educated*, dass sie die Koordinaten jedes Absprungpunktes kennen und zu einem bestimmten anderen Punkt hüpfen können. Sie hüpfen aber nicht wahllos zu irgendwelchen Punkten, sondern können aus den Koordinaten des Absprungpunktes einen Zielpunkt mit Hilfe einer **komplexen Funktion** berechnen.

Wir betrachten zu Beginn die recht einfache und für alle komplexen Zahlen z definierte Funktion f mit $f(z) = z^2 + c$ mit einer komplexen Konstanten c . Ein Floh betrachtet nun seinen Absprungpunkt als komplexe Zahl z , berechnet daraus den komplexen Funktionswert $f(z)$, nimmt diesen Wert als Ziel und springt dann dort hin.

Bis hierher ist der ganze Vorgang recht uninteressant. Interessant wird der Vorgang erst, wenn der Floh jeweils den angesprungenen Zielpunkt wieder als Startpunkt für einen neuen Sprung nimmt und so immer weiter auf dem Tisch herumhüpft. Man bekommt dann eine Folge von komplexen Zahlen $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, z_{n+1} = z_n^2 + c$.

Aufgabe 1: Als Beispiel nehmen wir einmal $c = 1 + i$ und als Startpunkt den Ursprung an und rechnen „zu Fuß“:

$$\begin{aligned}z_1 &= 0 \\z_2 &= z_1^2 + c = 0^2 + (1 + i) = 1 + i \\z_3 &= z_2^2 + c = \\z_4 &= z_3^2 + c = \\z_5 &= z_4^2 + c =\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Wie weit hat sich der Floh beim letzten Beispiel am Ende vom Ursprung entfernt?

Aufgabe 3: Ein Floh startet im Ursprung mit $c = i$. Wie hüpft er weiter?

$$\begin{aligned}z_1 &= 0 \\z_2 &= z_1^2 + c = 0^2 + i = i \\z_3 &= z_2^2 + c = \\z_4 &= z_3^2 + c = \\z_5 &= z_4^2 + c =\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Ein Floh startet im Ursprung mit $c = -1$. Wie hüpft er weiter?

$$\begin{aligned}z_1 &= 0 \\z_2 &= z_1^2 + c = 0^2 + (-1) = -1 \\z_3 &= z_2^2 + c = \\z_4 &= z_3^2 + c = \\z_5 &= z_4^2 + c =\end{aligned}$$

Das Hüpfen der Flöhe soll nun systematisch mit dem Computer untersucht werden. Da Computer nicht wissen, dass $i^2 = -1$ ist, müssen wir ihnen die Hüpfregel koordinatenweise beibringen. Wir setzen

$$\begin{aligned}\text{Startpunkt: } z_n &= x_n + iy_n \\ \text{Zielpunkt: } z_{n+1} &= x_{n+1} + iy_{n+1} \\ \text{Konstante: } c &= c_x + ic_y\end{aligned}$$

Schreibt man die Gleichung $z_{n+1} = z_n^2 + c$ mit Real- und Imaginärteilen auf, ergibt sich

$$\begin{aligned}x_{n+1} + iy_{n+1} &= (x_n + iy_n)^2 + c_x + ic_y = x_n^2 + 2ix_ny_n - y_n^2 + c_x + ic_y \\ &= (x_n^2 - y_n^2 + c_x) + i(2x_ny_n + c_y)\end{aligned}$$

Mit dieser Vorschrift können wir also die Koordinaten des neuen Punktes einzeln berechnen:

$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + c_x \\ y_{n+1} &= 2x_ny_n + c_y\end{aligned}$
--

Das kann dann auch ein Computer oder ein dummer Floh schaffen ohne Kenntnisse von komplexen Zahlen. Ein paar Multiplikationen und Additionen können ja wohl nicht so schwierig sein!

Aufgabe 5: Lasse durch ein PHP-Programm einen Floh einige Sprünge machen und die Punkte bzw. komplexen Zahlen ausgeben. Wenn er vom Tisch gefallen ist, soll eine Meldung ausgegeben werden. Wähle für den Radius des Tisches z.B. $R = 2$. Zu Beginn ist ein HTML-Formular zu erstellen, in dem der Wert der komplexen Konstanten $c = c_x + c_y i$ und die Anzahl der Sprünge abgefragt werden. Der Floh soll wie immer im Ursprung starten.

Weitere Überlegungen

Man kann man sich nun verschiedene Fragen stellen:

- Gibt es „interessante“, d.h. zirkusreife Sprungfolgen?
- Bleibt ein Floh immer auf dem Tisch oder fällt er bei einem bestimmten n herunter?
- Wie lange dauert es, bis ein Floh vom Tisch fällt?
- Welchen Einfluss hat der erste Startpunkt?
- Welchen Einfluss hat die Konstante c für einen bestimmten ersten Startpunkt?

Aufgaben:

1. Lass einen Floh im Ursprung starten und dann z.B. höchstens 1000 Sprünge machen. Der Floh hat schmutzige Füße und produziert bei jedem Sprung einen Fleck auf dem Tisch bzw. einen Punkt in einer Turtle-Graphik.

Das Programm soll vorzeitig stoppen, wenn der Floh vom Tisch gefallen ist.

Finde interessante Werte von c für zirkusreife Darbietungen!

Alternative Darstellung: Ein Sprung kann auch durch eine Strecke sichtbar gemacht werden.

2. Denke dir auf einem zweiten Tisch (ohne Flöhe) ein komplexes Koordinatensystem für Werte von c . Man nimmt nun einen bestimmten Wert von c , startet damit einen Floh auf dem ersten Tisch im Ursprung und lässt ihn z.B. $n = 100$ Sprünge machen. Wenn er nach n Sprüngen noch nicht vom Tisch gefallen ist, macht man auf dem zweiten Tisch eine Markierung (schwarzer Punkt) an der Stelle c . Fällt der Floh vom Tisch, macht man keine Markierung. Wie sieht der zweite Tisch aus, wenn man das für alle bzw. besser genügend viele Punkte c (je nach Bildschirmauflösung) gemacht hat?

Man erhält die sogenannte *Mandelbrotmenge*, die zuerst von BENOIT B. MANDÉLBROT 1980 auf einem für damalige Verhältnisse schnellen Computer in einem

IBM-Forschungszentrum dargestellt wurde. Oftmals wird diese Graphik auch als *Apfelmännchen* bezeichnet.

Ich selbst habe diese Graphik zum ersten Mal ca. 1983 auf einem Commodore C64 mit 1 MHz und einer Bildschirmauflösung von $320 \cdot 200$ programmiert. Je nach Iterationstiefe dauerte das mehrere Stunden!

3. Wie vorherige Aufgabe, aber nun sollen auch die heruntergefallenen Flöhe beachtet werden. Je nachdem, wie viele Sprünge es gedauert hat, bis ein Floh vom Tisch gefallen ist, wird der Punkt für c auf dem zweiten Tisch mit einer anderen Farbe eingefärbt. Möglich sind z.B. zyklische Einfärbungen: rot - grün - blau - rot - grün - blau usw.
4. Der Tisch für den Floh muss ja nicht unbedingt rund sein. Man experimentiere mit quadratischen oder rechteckigen Tischen.
5. Man wählt ein festes c . Nun merkt man sich den ersten Startpunkt des Flohs, lässt ihn hüpfen und färbt nun den Startpunkt mit einer Farbe entsprechend den oben angegebenen Regeln. Für jedes c erhält man nun ein eigenes Bild. Suche zirkusreife Werte für c !

Man erhält die sogenannte *Juliamenge*, die nach dem französischen Mathematiker GASTON JULIA (1893–1978) benannt ist.

6. Es muss ja nicht immer eine so einfache Funktion wie f mit $f(z) = z^2 + c$ sein. Experimentiere mit anderen komplexen Funktionen!

Viel Spaß bei der Entdeckung von Ästhetik in der Mathematik!